# 3.9 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x) = αημx + βσυνx

## Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 113 – 114

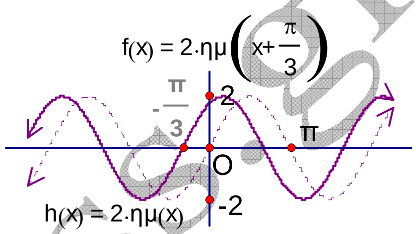
## Α΄ Ομάδας

### 1.i)

Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της παρακάτω συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

$$f(x) = 2ημ\left(x + \frac{π}{3}\right)$$

**Λύση**



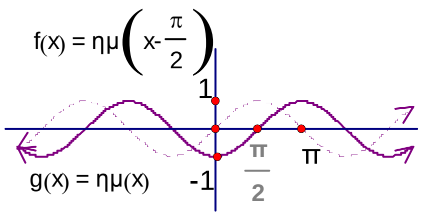

Η συνάρτηση $f(x) = 2ημ\left(x + \frac{π}{3}\right)$ είναι της μορφής $f(x) = ρημ(x + φ)$, άρα έχει μέγιστη τιμή 2, ελάχιστη –2 και η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $h(x) = 2ημx$ (διακεκομένης) προς τα αριστερά κατά $\frac{π}{3}$ μονάδες. Περίοδος αυτής είναι η $T = 2π$

### 1.ii)

Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή της παρακάτω συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

$$f(x) = ημ\left(x - \frac{π}{2}\right)$$

**Λύση**




Η συνάρτηση $f(x) = ημ\left(x - \frac{π}{2}\right)$ είναι της μορφής $f(x) = ρημ(x + φ)$, άρα έχει μέγιστη τιμή 1, ελάχιστη –1 και η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $h(x) = ημx$ (διακεκομμένης) προς τα δεξιά κατά $\frac{π}{2}$ μονάδες. Περίοδος αυτής είναι η $T = 2π$

netsuccess.gr

## 2.i)

Να γράψετε στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu(x + \varphi)$ τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3}\,\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

**Λύση**

Είναι της μορφής $f(x) = \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x$ με $\alpha = \sqrt{3}$ και $\beta = -1$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

Άρα $f(x) = 2\eta\mu(x - \frac{\pi}{6})$

## 2.ii)

Να γράψετε στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu(x + \varphi)$ τη συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

**Λύση**

Είναι της μορφής $f(x) = \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x$ με $\alpha = -1$ και $\beta = 1$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα $f(x) = \sqrt{2}\,\eta\mu\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

## 2.iii)

Να γράψετε στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu(x + \varphi)$ τη συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x - \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x$

**Λύση**

Είναι της μορφής $f(x) = \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x$ με $\alpha = -1$ και $\beta = -\sqrt{3}$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{-1}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

Άρα $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

netsuccess.gr

## 2.iv)

Να γράψετε στη μορφή $f(x) = ρημ(x + φ)$ τη συνάρτηση $f(x) = ημx – συνx$ .

**Λύση**

Είναι της μορφής $f(x) = αημx + βσυνx$ με $α = 1$ και $β = –1$

$$ρ = \sqrt{α^2+β^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$συνφ = \frac{α}{ρ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad ημφ = \frac{β}{ρ} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad φ = -\frac{π}{4}$$

Άρα $f(x) = \sqrt{2}\,ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)$

## 3.i)

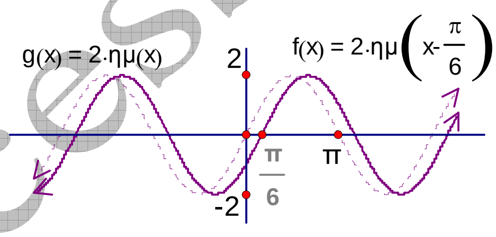
Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{3}\,ημx – συνx$$

**Λύση**

Από την άσκηση 2.i) έχουμε

$f(x) = 2ημ\left(x-\frac{π}{6}\right)$




Η συνάρτηση μας είναι της μορφής

$f(x) = ρημ(x + φ)$, άρα έχει μέγιστη

τιμή 2, ελάχιστη –2 και η γραφική της

παράσταση προκύπτει από οριζόντια

μετατόπιση της $g(x) = 2ημx$ (διακεκομένης)

προς τα δεξιά κατά $\frac{π}{6}$ μονάδες.

netsuccess.gr

## 3.ii)

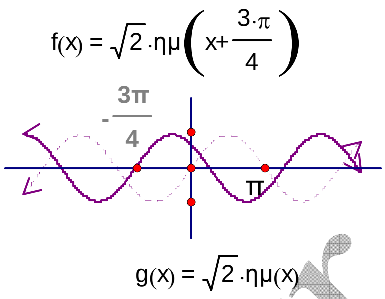
Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = -\,ημx + συνx$$

**Λύση**

Από την άσκηση 2.ii) έχουμε

$f(x) = \sqrt{2}\,ημ\left(x + \dfrac{3π}{4}\right)$




Η συνάρτηση μας είναι της μορφής

$f(x) = ρημ(x + φ)$, άρα έχει μέγιστη τιμή $\sqrt{2}$, ελάχιστη $-\sqrt{2}$ και η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $g(x) = \sqrt{2}\,ημx$ (διακεκομένης) προς τα αριστερά κατά $\dfrac{3π}{4}$ μονάδες.

## 3.iii)

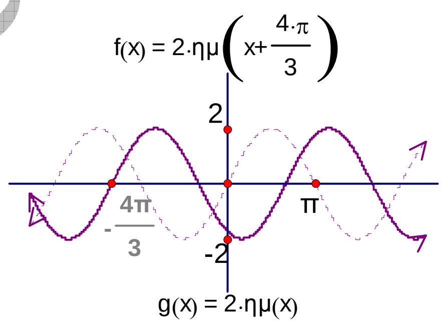
Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = -\,ημx - \sqrt{3}\,συνx$$

**Λύση**

Από την άσκηση 2.iii) έχουμε

$f(x) = 2ημ\left(x + \dfrac{4π}{3}\right)$




Η συνάρτηση μας είναι της μορφής

$f(x) = ρημ(x + φ)$, άρα έχει μέγιστη τιμή 2, ελάχιστη –2 και η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $g(x) = 2ημx$ (διακεκομένης) προς τα αριστερά κατά $\dfrac{4π}{3}$ μονάδες.

netsuccess.gr

## 3.iii)

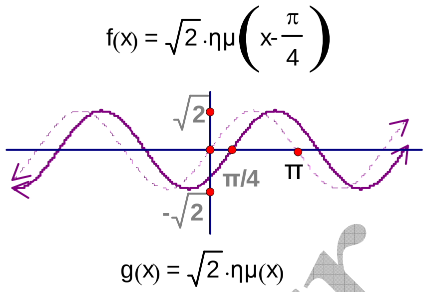
Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \text{ημ}x - \text{συν}x$$

**Λύση**

Από την άσκηση 2.iv) έχουμε

$$f(x) = \sqrt{2}\,\text{ημ}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$




Η συνάρτηση μας είναι της μορφής $f(x) = \rho\,\text{ημ}(x + \varphi)$, άρα έχει μέγιστη τιμή $\sqrt{2}$, ελάχιστη $-\sqrt{2}$ και η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $g(x) = \sqrt{2}\,\text{ημ}x$ (διακεκομένης) προς τα δεξιά κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες.

## 4.i)

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{3}\,\text{ημ}x - \text{συν}x = 2$

**Λύση**

Θέτουμε $f(x) = \sqrt{3}\,\text{ημ}x - \text{συν}x$

Είναι της μορφής $f(x) = \alpha\,\text{ημ}x + \beta\,\text{συν}x$ με $\alpha = \sqrt{3}$ και $\beta = -1$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{συν}\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \text{ημ}\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

Άρα $f(x) = 2\text{ημ}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Η δοσμένη εξίσωση γίνεται $\Leftrightarrow$

$$2\text{ημ}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2$$

$$\text{ημ}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\text{ημ}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \text{ημ}\frac{\pi}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 2k\pi + \frac{4\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

netsuccess.gr

**4.ii)**

Να λύσετε την εξίσωση $\quad συνx - ημx = 1$

**Λύση**

Θέτουμε $\quad f(x) = συνx - ημx = -ημx + συνx$

Είναι της μορφής $\quad f(x) = αημx + βσυνx \quad$ με $\;α = -1\;$ και $\;β = 1$

$$ρ = \sqrt{α^2+β^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$συνφ = \frac{α}{ρ} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad ημφ = \frac{β}{ρ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad φ = \frac{3π}{4}$$

Άρα $\quad f(x) = \sqrt{2}\,ημ(x + \frac{3π}{4})$

Η δοσμένη εξίσωση γίνεται

$$\sqrt{2}\,ημ\left(x + \frac{3π}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad ημ\left(x + \frac{3π}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ημ\left(x + \frac{3π}{4}\right) = ημ\frac{π}{4}$$

$$x + \frac{3π}{4} = 2kπ + \frac{π}{4} \quad ή \quad x + \frac{3π}{4} = 2kπ + π - \frac{π}{4}$$

$$x = 2kπ + \frac{π}{4} - \frac{3π}{4} \quad ή \quad x = 2kπ + π - \frac{π}{4} - \frac{3π}{4}$$

$$x = 2kπ - \frac{2π}{4} \quad ή \quad x = 2kπ$$

$$x = 2kπ - \frac{π}{2} \quad ή \quad x = 2kπ\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

netsuccess.gr

**4.iii)**

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}$ ημx + $\sqrt{6}$ συνx + 2 = 0

**Λύση**

Θέτουμε f(x) = $\sqrt{2}$ ημx + $\sqrt{6}$ συνx

Είναι της μορφής f(x) = αημx + βσυνx με α = $\sqrt{2}$ και β = $\sqrt{6}$

$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\text{συνφ} = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ και $\text{ημφ} = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

Άρα $f(x) = 2\sqrt{2}\,\text{ημ}(x+\frac{\pi}{3})$

Η δοσμένη εξίσωση γίνεται

$2\sqrt{2}\,\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -2$

$\sqrt{2}\,\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -1$

$\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\text{ημ}\frac{\pi}{4} = \text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$

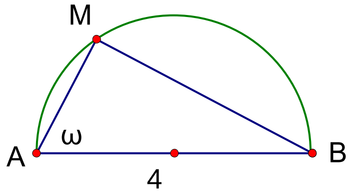
$x = 2k\pi - \frac{7\pi}{12}$ ή $x = 2k\pi + \frac{11\pi}{12}$ , $k \in \mathbb{Z}$

netsuccess.gr

# Β΄ Ομάδας

**1.**

Να υπολογίσετε τη γωνία $\omega$ του διπλανού σχήματος, έτσι ώστε να ισχύει $(MA) + (MB) = 2\sqrt{6}$




**Λύση**

Είναι $(MB) = 4\eta\mu\omega$ και $(MA) = 4\sigma\upsilon\nu\omega$

Άρα $4\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega = 2\sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ **(1)**

Θέτουμε $f(\omega) = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega$

Είναι της μορφής $f(\omega) = \alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega$ με $\alpha = 1$ και $\beta = 1$

$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\alpha}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu\varphi = \dfrac{\beta}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

Άρα $f(\omega) = \sqrt{2}\,\eta\mu\left(\omega+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Η εξίσωση (1) γίνεται $\sqrt{2}\,\eta\mu\left(\omega+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \quad \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3}$$

$$\omega + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \omega + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

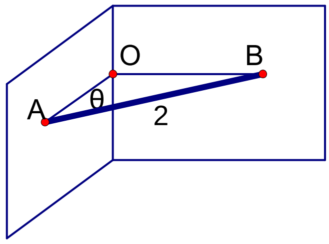
$$\omega = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \omega = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$\omega = \frac{\pi}{12} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{5\pi}{12}$$

netsuccess.gr

**2.**

Μια μπάρα ΑΒ μήκους 2m τοποθετείτε οριζόντια μεταξύ δύο κάθετων τοίχων. Για μεγαλύτερη αντοχή πρέπει να τοποθετηθεί, έτσι ώστε το (ΟΑ) + (ΟΒ) να γίνει μέγιστο.




**i)** Να εκφράσετε το (ΟΑ) + (ΟΒ) ως συνάρτηση του θ.

**ii)** Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το (ΟΑ) + (ΟΒ) γίνεται μέγιστο και να προσδιορίσετε το μέγιστο αυτό.

**Λύση**

**i)**

Είναι (ΟΑ) = 2συνθ και (ΟΒ) = 2ημθ άρα (ΟΑ) + (ΟΒ) = 2συνθ + 2ημθ $\Rightarrow$

(ΟΑ) + (ΟΒ) = 2(ημθ + συνθ) **(1)**

Θέτουμε $f(\theta) = ημθ + συνθ$

Είναι της μορφής $f(\theta) = αημθ + βσυνθ$ με $\alpha = 1$ και $\beta = 1$

$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$συνφ = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $ημφ = \frac{\beta}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Άρα $f(\theta) = \sqrt{2}\,ημ\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

(1) $\Rightarrow$ $(ΟΑ) + (ΟΒ) = 2\sqrt{2}\,ημ\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

**ii)**

Το άθροισμα (ΟΑ) + (ΟΒ) γίνεται μέγιστο όταν γίνει μέγιστο το $ημ\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,

δηλαδή όταν $ημ\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = 1 = ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

Η τιμή αυτού του μέγιστου είναι $2\sqrt{2}$

netsuccess.gr

## 3.i)

Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 5ημx + 12συνx + 3$$

**Λύση**

Θέτουμε $g(x) = 5ημx + 12συνx$. Τότε $f(x) = g(x) + 3$.

Η g είναι της μορφής $g(x) = αημx + βσυνx$ με $α = 5$ και $β = 12$

$ρ = \sqrt{α^2 + β^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

Μέγιστη τιμή της g είναι 13 και ελάχιστη –13. Επομένως

Μέγιστη τιμή της f είναι $13 + 3 = 16$ και ελάχιστη $-13 + 3 = -10$

## 3.ii)

Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 4συνx(ημx + συνx)$$

**Λύση**

$f(x) = 4συνx(ημx + συνx) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 2(2συνxημx + 2συν^2x)$

$f(x) = 2(ημ2x + 1 + συν2x)$

$f(x) = 2(ημ2x + συν2x + 1)$

Θέτουμε $g(x) = ημ2x + συν2x$. Τότε $f(x) = 2(g(x) + 1))$

Η g είναι της μορφής $g(x) = αημx + βσυνx$ με $α = 1$ και $β = 1$

$ρ = \sqrt{α^2 + β^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Μέγιστη τιμή της g είναι $\sqrt{2}$ και ελάχιστη $-\sqrt{2}$.. Επομένως

Μέγιστη τιμή της f είναι $2(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} + 2$ και

ελάχιστη $2(-\sqrt{2} + 1) = -2\sqrt{2} + 2$

netsuccess.gr

**4.**

Να λύσετε την εξίσωση $2ημx(\sqrt{3}\,συνx - ημx) = \sqrt{2} - 1$

**Λύση**

$$2ημx(\sqrt{3}\,συνx - ημx) = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\,ημx\,συνx - 2ημ^2x = \sqrt{2} - 1$$

$$\sqrt{3}\,ημ2x - (1 - συν2x) = \sqrt{2} - 1$$

$$\sqrt{3}\,ημ2x - 1 + συν2x = \sqrt{2} - 1$$

$$\sqrt{3}\,ημ2x + συν2x = \sqrt{2} \quad \mathbf{(1)}$$

Το πρώτο μέλος είναι της μορφής $αημx + βσυνx$ με $α = \sqrt{3}$ και $β = 1$

$ρ = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$συνφ = \frac{α}{ρ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $ημφ = \frac{β}{ρ} = \frac{1}{2} \Rightarrow φ = \frac{π}{6}$

$$(1) \Leftrightarrow 2ημ\left(2x + \frac{π}{6}\right) = \sqrt{2}$$

$$ημ\left(2x + \frac{π}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ημ\left(2x + \frac{π}{6}\right) = ημ\frac{π}{4}$$

$$2x + \frac{π}{6} = 2kπ + \frac{π}{4} \quad ή \quad 2x + \frac{π}{6} = 2kπ + π - \frac{π}{4}$$

$$2x = 2kπ + \frac{π}{4} - \frac{π}{6} \quad ή \quad 2x = 2kπ + π - \frac{π}{4} - \frac{π}{6}$$

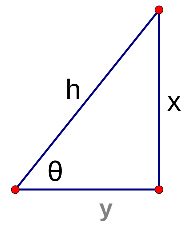
$$2x = 2kπ + \frac{π}{12} \quad ή \quad 2x = 2kπ + \frac{7π}{12}$$

$$x = kπ + \frac{π}{24} \quad ή \quad x = kπ + \frac{7π}{24}, \; k \in \mathbb{Z}$$

netsuccess.gr

## 5.

Με συρματόπλεγμα μήκους 40m περιφράσσουμε τμήμα γης σχήματος ορθογωνίου τριγώνου. Αν η υποτείνουσα είναι h m και η μια οξεία γωνία θ rad




**i)** να αποδείξετε ότι $h = \dfrac{40}{ημθ + συνθ + 1}$

**ii)** για ποια τιμή του θ το h παίρνει τη μικρότερη τιμή και ποια είναι αυτή;

**Λύση**

**i)**

$x = h\,ημθ, \qquad y = h\,συνθ$

$x + y + h = 40 \Rightarrow h\,ημθ + h\,συνθ + h = 40 \Rightarrow h(ημθ + συνθ + 1) = 40 \Rightarrow$

$$h = \frac{40}{ημθ + συνθ + 1}$$

**ii)**

Θέτουμε $f(θ) = ημθ + συνθ$. Τότε $h = \dfrac{40}{f(θ) + 1}$

Το $f(θ)$ είναι της μορφής $f(θ) = αημθ + βσυνθ$ με $α = 1$ και $β = 1$

$ρ = \sqrt{α^2 + β^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$συνφ = \dfrac{α}{ρ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $ημφ = \dfrac{β}{ρ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow φ = \dfrac{π}{4}$

Άρα $f(θ) = \sqrt{2}\,ημ(θ + \dfrac{π}{4})$

Το h παίρνει τη μικρότερη τιμή, όταν το $f(θ) = \sqrt{2}\,ημ\left(θ + \dfrac{π}{4}\right)$ παίρνει τη μεγαλύτερη, δηλαδή όταν $ημ\left(θ + \dfrac{π}{4}\right) = 1$, δηλαδή όταν $θ + \dfrac{π}{4} = \dfrac{π}{2}$, δηλαδή $θ = \dfrac{π}{4}$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή του h είναι

$$\frac{40}{\sqrt{2}.1 + 1} = \frac{40}{\sqrt{2} + 1} = \frac{40(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = 40(\sqrt{2} - 1)$$

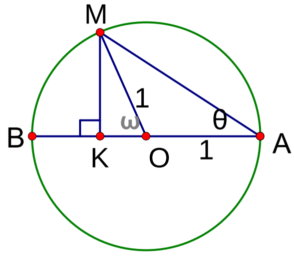
netsuccess.gr

**6.**

Στο διπλανό σχήμα:

**i)** Να δείξετε ότι η περίμετρος $P$ του τριγώνου $MKO$ ισούται με $P = 1 + ημ2θ + συν2θ$.

**ii)** Για ποια τιμή του $θ$ το $P$ παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή και ποια είναι αυτή;




**Λύση**

**i)**

Ονομάζουμε $ω$ τη γωνία $K\hat{O}M$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $OAM$, έχουμε $O\hat{M}A = θ$..

Αλλά $ω = θ + O\hat{M}A$ σαν εξωτερική του τριγώνου $OAM$.

Άρα $ω = 2θ$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $KOM$, έχουμε

$MK = 1 \cdot ημω = ημ2θ$ και $KO = 1 \cdot συνω = συν2θ$

$P = OM + MK + KO = 1 + ημ2θ + συν2θ$

**ii)**

Θέτουμε $f(θ) = ημ2θ + συν2θ$. Τότε $P = 1 + f(θ)$

Το $f(θ)$ είναι της μορφής $f(θ) = αημ2θ + βσυν2θ$ με $α = 1$ και $β = 1$

$$ρ = \sqrt{α^2 + β^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$συνφ = \frac{α}{ρ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad ημφ = \frac{β}{ρ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad φ = \frac{π}{4}$$

Άρα $f(θ) = \sqrt{2}\,ημ(2θ + \frac{π}{4})$

Το $P$ παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή, όταν το $f(θ) = \sqrt{2}\,ημ\left(2θ + \frac{π}{4}\right)$ παίρνει τη

μεγαλύτερη τιμή, δηλαδή όταν $ημ\left(2θ + \frac{π}{4}\right) = 1$

$$2θ + \frac{π}{4} = \frac{π}{2}$$

$$2θ = \frac{π}{4} \quad \Leftrightarrow \quad θ = \frac{π}{8}$$

Η μεγαλύτερη αυτή τιμή είναι $1 + f\left(\frac{π}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}\,ημ\left(2\frac{π}{8} + \frac{π}{4}\right)$

$$= 1 + \sqrt{2}\,ημ\frac{π}{2}$$

$$= 1 + \sqrt{2} \cdot 1 = 1 + \sqrt{2}$$

netsuccess.gr